14

ESTUDOS FUNENSEG

Precificação: Credibilidade, Risco no Resseguro e Aplicações Diversas

Paulo Pereira Ferreira *

Abril de 2007

ESCOLA NACIONAL de SEGUROS
FUNENSEG

---

* Sócio Consultor da Towers Perrin, Mestre em Estatística e diplomado pela UFRJ, Professor da área de seguros nos cursos de graduação em Atuária da UFRJ e de pós-graduação da Funenseg, FGV-SP, PUC-RJ e da Universidade Candido Mendes (UCAM-RJ), Membro da International Actuarial Association (IAA) e da Comissão de Ética do Instituto Brasileiro de Atuária (IBA), autor do livro "Modelos de Precificação e Ruína para Seguros de Curto Prazo", publicado pela Funenseg. paulo.ferreira@towersperrin.com

Unidades Funenseg
Rio de Janeiro • RJ (Matriz)
Rua Senador Dantas, 74 - térreo,
2ª sobreloja., 3º e 4º and. - Centro
Tel.: 21 3132-1022
faleconosco@funenseg.org.br
Rio de Janeiro • RJ
Av. Franklin Roosevelt, 39 - sobreloja - Castelo
Tel. : 21 3132-1111
Blumenau • SC
Tel.: 47 3326-7105
nucleosc@funenseg.org.br
Brasília • DF
Tel.: 61 3323-7032
nucleodf@funenseg.org.br
Campinas • SP
Tel.: 19 3212-0608
apoiocampinas@funenseg.org.br
Curitiba • PR
Tel.: 41 3264-9614
nucleopr@funenseg.org.br
Goiânia • GO
Tel.: 62 3945-1210
apoiogoias@funenseg.org.br
Porto Alegre • RS
Tel.: 51 3224-1965
nucleors@funenseg.org.br
Recife • PE
Tel.: 81 3423-1134
nucleope@funenseg.org.br
Ribeirão Preto • SP
Tel.: 16 3620-2200
apoiorbpreto@funenseg.org.br
Salvador • BA
Tel.: 71 3341-2688
nucleoba@funenseg.org.br
Santos • SP
Tel.: 13 3289-9852
apoiosantos@funenseg.org.br
São José do Rio Preto • SP
Tel.: 17 3222-6515
apoiosjriopreto@funenseg.org.br
São Paulo • SP
Tel.: 11 3105-3140
nucleosp@funenseg.org.br

Central de Atendimento: **0800 253322**
www.funenseg.org.br

ESTUDOS FUNENSEG

Série destinada à publicação de trabalhos e pesquisas de profissionais das áreas de seguro, resseguro, previdência privada complementar e capitalização. É comercializada com exclusividade em seminários, palestras, fóruns e workshops realizados pela Funenseg e por instituições do Mercado de Seguros. Os textos podem ser impressos (em formato pdf) no site da Funenseg (www.funenseg.org.br), link "publicações/livros técnicos".

Caso haja interesse em adquirir os números da série no formato original, entrar em contato com o setor de Vendas da Funenseg ou com a Secretaria da Escola: Rua Senador Dantas, 74/Térreo – Centro – Rio de Janeiro – RJ (Tel.: (21) 3132-1096 – e-mail: vendas@funenseg.org.br).

Para publicação na série, os textos devem ser encaminhados, para avaliação, para o Diretor de Pesquisa e Desenvolvimento da Funenseg, Claudio R. Contador. Enviar duas cópias: uma por e-mail para claudiocontador@funenseg.org.br, mencionando no assunto "Estudos Funenseg – Trabalho para Avaliação"; e outra impressa para a Diretoria de Pesquisa e Desenvolvimento da Funenseg (Rua Senador Dantas, 74/3o andar – Centro – Rio de Janeiro – RJ – CEP 20031-205), identificando no envelope "Estudos Funenseg". Incluir nas duas cópias um resumo em português e em inglês do trabalho. As referências bibliográficas devem ser incluídas no final do texto. Enviar também um breve currículo profissional, e-mail e telefone para contato.

Coordenação
Claudio R. Contador
claudiocontador@funenseg.org.br

Editor
Antonio Carlos Teixeira
antonio@funenseg.org.br

Conselho Editorial
Claudio Contador
Francisco Galiza
Joel Gomes
José Americo Peón de Sá
Lúcio Antônio Marques
Nelson Victor Le Cocq d'Oliveira
Ricardo Bechara Santos
Sergio Viola

Capa
Ronny Martins
ronny@funenseg.org.br

Diagramação
Info Action Editoração Eletrônica

Revisão
Maria Helena de Lima Hatschbach

Tiragem: 100 exemplares

Uma publicação da Diretoria de Pesquisa e Desenvolvimento
Núcleo de Publicações
publicacao@funenseg.org.br

Virginia L. P. de S. Thomé
Bibliotecária Responsável pela elaboração da ficha catalográfica

F443p Ferreira, Paulo Pereira
Precificação: credibilidade, risco no resseguro e aplicações diversas / Paulo Pereira Ferreira. – Rio de Janeiro: Funenseg, 2007.
58 p.; 30 cm. (Estudos Funenseg, nº 14)

1. Teoria do risco. 2. Tarifação (Seguro). 3. Risco (Resseguro). 4. Precificação. 5. Teoria da credibilidade. 6. Resseguro – Contratos. I. Série. II.Título.

07-0655 CDU 368.01

Sumário

Resumo

Neste estudo, serão descritos os principais tipos de contratos de resseguro, mostrando-se as aplicações práticas a eles relacionados, tanto do ponto de vista do ressegurador, onde se inclui o processo de precificação, quanto do ponto de vista da seguradora, onde se destaca a obtenção da distribuição da variável aleatória "valor de 1 sinistro após a contratação do resseguro", aqui denominada variável aleatória "valor de 1 sinistro retido".

Serão apresentados, também, diversos instrumentos práticos de um contrato de seguro, tais como: franquia, seguros proporcionais ou não proporcionais e reintegração automática da importância segurada. Para cada um desses instrumentos será desenvolvido o processo de precificação correspondente.

Trataremos ainda do processo de precificação a partir da chamada Teoria da Credibilidade. Por esse processo de precificação é possível conjugar a experiência da seguradora com a experiência de riscos similares, o que torna a Teoria da Credibilidade uma importante ferramenta para as seguradoras que possuem pouca massa de sinistros para utilizar no processo de tarifação.

Summary

In this study, the main types of reinsurance contracts will be described, presenting the practical applications related to them, as under the reinsurer's point of view, where the pricing process is included, as the insurance companies' point of view, where it is stand out the obtainment of the distribution of the random variable "value of 1 loss after the reinsurance undertaken", here denominated random variable "value of 1 retained loss".

Several practical instruments from an insurance contract will also be presented, such as: deductible, proportional and non-proportional insurance contracts and the automatic reintegration of the insured capital. For each of these present instruments, the correspondent pricing process will be developed.

We will also approach the pricing process from the Credibility Theory, as it is called. Through this pricing process, it is possible to conjugate the experience from the Insurance Company with the experience from similar risks, which makes the Credibility Theory an important tool for the Insurance Companies that count on a small mass of claims to be used on the pricing process.

APLICAÇÕES EM RESSEGURO

O resseguro é um dos principais instrumentos de transferência de risco da seguradora, contribuindo sobremaneira para a homogeneização dos seus riscos. A seguir, serão apresentadas diversas aplicações da Teoria do Risco ao resseguro, com ênfase nas aplicações relacionadas ao processo de precificação dos principais tipos de contratos de resseguro.

Serão descritos os principais tipos de contratos de resseguro, mostrando-se as aplicações práticas a eles relacionados, tanto do ponto de vista do ressegurador, onde se inclui o processo de precificação, quanto do ponto de vista da seguradora, onde se destaca a obtenção da distribuição da variável aleatória "valor de 1 sinistro após a contratação do resseguro", aqui denominada variável aleatória "valor de 1 sinistro retido".

Contratos de Resseguro

Vejamos a seguir os principais contratos de resseguro, e os principais aspectos referentes à precificação de um contrato de resseguro.

Classificação dos Contratos de Resseguro

Os contratos de resseguro podem ser classificados em contratos proporcionais e contratos não proporcionais.

Nos contratos proporcionais, os prêmios e sinistros são divididos proporcionalmente entre o segurador e o ressegurador numa proporção preestabelecida.

Nos contratos não proporcionais não há valores segurados cedidos, mas limites pré-definidos de participação do ressegurador nos sinistros.

Contratos Proporcionais

CONTRATO DE QUOTA-PARTE

Neste contrato a seguradora cede um percentual determinado do risco. Em caso de sinistro, essa recupera da resseguradora a mesma proporção da indenização.

Exemplo:
Quota = 25%
Prêmio de seguro = $ 100
Importância segurada = $ 100.000
Sinistro bruto = $ 60.000
Logo;
Prêmio de resseguro (25%) = $ 25

Prêmio retido (75%) = \$ 75

Recuperação de resseguro (25%) = \$ 15.000

Sinistro retido (75%) = \$ 45.000

CONTRATO DE EXCEDENTE DE RESPONSABILIDADE OU SURPLUS

A seguradora assume o risco até uma quantia, calculada pelo atuário, chamada limite técnico (LT) ou limite de retenção.

Este é um contrato proporcional como o quota-parte, pois, quando a importância segurada (IS) supera o LT, a seguradora transfere o excedente de forma proporcional. A partir desse momento, temos um contrato proporcional e, qualquer que seja o valor do sinistro, a seguradora recupera a proporção cedida.

Modelo:

$IS \leq LT \rightarrow$ não há resseguro

$IS > LT \rightarrow$ seguradora cede $\dfrac{IS - LT}{IS}$ proporcionalmente

Exemplo:

LT = \$ 5.000

Prêmio = \$ 80

IS = \$ 8.000

Sinistro bruto = \$ 1.600

Logo;

Prêmio de resseguro (3/8) = \$ 30

Prêmio retido (5/8) = \$ 50

Recuperação de resseguro

Sinistro retido (5/8) = \$ 1.000

Veja que, mesmo o sinistro tendo sido inferior ao LT, houve recuperação da indenização na mesma proporção da cessão de prêmio (3/8).

Exemplo 1

Seja uma carteira de seguros com as seguintes características:

- Plano de resseguro de excedente de responsabilidade, com LT = \$ 80;
- Taxa pura anual cobrada pela seguradora é de 7%;
- Taxa comercial anual cobrada pela resseguradora é de 10%;
- Comissão de resseguro é igual a 20%;
- O sinistro agregado possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma Normal;
- O número médio de sinistros em 1 ano (λ) é aproximado pelo número observado de sinistros em 1 ano (n');
- $E[X]$ e $E[X^2]$ são aproximados pelos momentos amostrais do valor observado de 1 sinistro;

– Relação de Importâncias Seguradas (IS) e sinistros brutos observados em 1 ano, sendo o valor do sinistro sempre igual ao valor da IS:

IS	$ 10	$ 30	$ 50	$ 80	$ 100	$ 5.000
Nº de apólices	2.000	1.500	900	700	160	20
Nº de sinistros	100	75	45	35	8	1

a) Calcular $P(S > P)$, sem considerar o resseguro;

b) Calcular $P(S_{RET} > P_{RET})$, considerando o resseguro;

Resposta:

a) Calcular $P(S > P)$, sem considerar o resseguro.

O número total de sinistros observados na carteira (n') é de:

$$n' = 100 + 75 + 45 + 35 + 8 + 1 = 264 \quad \rightarrow \quad \lambda = n' = 264$$

O total de IS bruta ($ISBT$) é de:

$$ISBT = 2.000 \times \$10 + 1.500 \times \$30 + 900 \times \$50 + 700 \times \$80 + 160 \times \$100 + 20 \times \$5.000$$
$$= \$282.000$$

E o prêmio puro anual total (P) é o produto da taxa pura anual pela $ISBT$, ou seja,

$$P = 7\% \times \$282.000 = \$19.740$$

Os momentos amostrais do valor de 1 sinistro bruto são:

$$E[X] = \frac{100 \times \$10 + 75 \times \$30 + 45 \times \$50 + 35 \times \$80 + 8 \times \$100 + 1 \times \$5.000}{264} = \$53{,}41$$

$$E[X^2] = \frac{100 \times \$10^2 + 75 \times \$30^2 + 45 \times \$50^2 + 35 \times \$80^2 + 8 \times \$100^2 + 1 \times \$5.000^2}{264} =$$

$$= \$96.568{,}18$$

Então:

$$E[S] = \lambda E[X] = 264 \times \$53{,}41 = \$14.100$$

$$V[S] = \lambda E[X^2] = 264 \times \$96.568{,}18 = \$25.494.000 \quad \rightarrow \quad \sigma[S] = \$5.049{,}16$$

Logo;

$$P(S > P) = P\left(Z > \frac{P - E[S]}{\sigma[S]}\right) = P\left(Z > \frac{\$19.740 - \$14.100}{5.049{,}16}\right) = P(Z > 1{,}12) = 13{,}14\%$$

b) Calcular $P(S_{RET} > P_{RET})$, considerando o resseguro.

O total de IS cedida em resseguro ($ISCD$) é de:

$$ISCD = 160 \times \$20 + 20 \times \$4.920 = \$101.600$$

E o prêmio comercial anual total de resseguro (P_{RES}) é o produto da taxa comercial anual de resseguro pela $ISCD$, ou seja,

$$P = 10\% \times \$101.600 = \$10.160$$

O custo de resseguro, líquido da comissão de resseguro, (C_{RES}) é de:

$$C_{RES} = (1 - 20\%) \times \$10.160 = \$8.128$$

Observe que a taxa de resseguro líquida de comissão de resseguro é igual a **8%** $(80\% \times 10\%)$.

O prêmio puro retido total (P_{RET}) é igual a:

$$P_{RET} = P - C_{RES} = \$19.740 - \$8.128 = \$11.612$$

Os momentos amostrais do valor de 1 sinistro retido são:

$$E[X_{RET}] = \frac{100 \times \$10 + 75 \times \$30 + 45 \times \$50 + 44 \times \$80}{264} = \$34{,}1667$$

$$E[X_{RET}^2] = \frac{100 \times \$10^2 + 75 \times \$30^2 + 45 \times \$50^2 + 44 \times \$80^2}{264} = \$1.786{,}36336$$

Então:

$$E[S_{RET}] = \lambda E[X_{RET}] = 264 \times \$34{,}17 = \$9.020$$

$$V[S_{RET}] = \lambda E[X_{RET}^2] = 264 \times \$1.786{,}3636 = \$471.600 \quad \rightarrow \quad \sigma[S_{RET}] = \$686{,}73$$

Logo;

$$P(S_{RET} > P_{RET}) = P\left(Z > \frac{P_{RET} - E[S_{RET}]}{\sigma[S_{RET}]}\right) = P\left(Z > \frac{\$11.612 - \$9.020}{686{,}73}\right) = P(Z > 3{,}77) = 0{,}01\%$$

Esta é uma situação em que a seguradora tem um grande benefício com o resseguro, pois houve uma redução drástica na probabilidade dos sinistros superarem os prêmios puros, mesmo sendo a taxa de resseguro líquida de comissão (8%) superior à taxa pura cobrada pela seguradora (7%).

Como a proporção de sinistros de altos valores é igual à proporção de IS de altos valores, pois a freqüência anual de sinistros é uniforme e igual a 5% em todas as faixas de IS, logo; a razão para esta melhoria na solvência da seguradora está na redução do coeficiente de variação dos sinistros agregados, principalmente pela transferência de risco na faixa de IS=$ 5.000.

Contratos Não Proporcionais

CONTRATO EXCESSO DE DANOS OU *EXCESS OF LOSS*

O compromisso da seguradora está limitado ao LT. Para sinistros acima do LT, a resseguradora paga a diferença entre o sinistro e o LT, e a seguradora paga o LT. Para sinistros até o LT, a seguradora paga todo o sinistro.

O prêmio de resseguro é um percentual do prêmio de seguro de toda a carteira, sendo este percentual aplicado inclusive àqueles riscos que apresentam $IS \leq LT$. No cálculo do prêmio leva-se em consideração a distribuição de sinistros que superam o LT. Este cálculo é semelhante ao feito nos seguros a 1o risco absoluto, de modo que quanto maior for o LT menor será a taxa de excesso de danos.

Modelo:

$SIN \leq LT \rightarrow$ não há recuperação

$SIN > LT \rightarrow$ a seguradora recupera $SIN - LT$

Exemplo 2

Calcular a taxa comercial anual a ser cobrada pelo ressegurador em um contrato de excesso de danos, a ser aplicada ao prêmio comercial anual da seguradora, dados:

– Total de importância segurada exposta ao risco é igual a $ 3.000.000;
– Taxa comercial anual cobrada pela seguradora é de 0,005;
– O sinistro agregado do ressegurador possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma Normal;
– Carregamento para despesas do ressegurador é igual a 20%;
– Nível de significância de 1% de modo que o sinistro agregado assumido pelo ressegurador em 1 ano não ultrapasse o total de prêmio puro anual de resseguro;
– O número médio de sinistros de resseguro em 1 ano (λ) é aproximado pelo número observado de sinistros em 1 ano (n');
– $E[X]$ e $E[X^2]$ do ressegurador são aproximados pelos momentos amostrais do valor observado de 1 sinistro;
– Relação de sinistros brutos observados em 1 ano:
  30 sinistros de $ 10, 20 sinistros de $ 30, 25 sinistros de $ 40 e 15 sinistros de $ 50.

Calcule a taxa comercial de resseguro para as seguintes situações:

a) LT = $ 20
b) LT = $ 35

Resposta:

O total de prêmio comercial anual (π) cobrado pela seguradora será:

$\pi = 0{,}005 \times \$3.000.000 = \$15.000$

a) LT = $ 20

Quando o LT = $ 20, os sinistros assumidos pelo ressegurador serão:

20 sinistros de $ 10, 25 sinistros de $ 20 e 15 sinistros de $ 30.

Logo; $n' = 60 \rightarrow \lambda = 60$

$$E[X] = \frac{20 \times \$10 + 25 \times \$20 + 15 \times \$30}{60} = \$19{,}17$$

$$E[X^2] = \frac{20 \times \$10^2 + 25 \times \$20^2 + 15 \times \$30^2}{60} = \$425$$

$$E[S^{col}] = \lambda E[X] = 60 \times \$19{,}17 = \$1.150{,}2$$

$$V[S^{col}] = \lambda E[X^2] = 60 \times \$425 = \$25.500 \rightarrow \sigma[S^{col}] = \$159{,}69$$

O total de prêmio puro anual de resseguro será determinado de tal forma que:

$$P(S^{col} > P) = 1\% \rightarrow P = E[S^{col}] + Z_{0,99}\sigma[S^{col}]$$

$$P = \$1.150{,}2 + 2{,}33 \times \$159{,}69 = \$1.522{,}28$$

Logo; a taxa pura anual de resseguro aplicada sobre π será:

$$\frac{P}{\pi} = \frac{\$1.522.28}{\$15.000} = 10{,}15\%$$

E a taxa comercial anual de resseguro, considerando o carregamento para despesas de 20%, será:

$$\frac{10{,}15\%}{0{,}8} = 12{,}69\%$$

b) LT = \$ 35

Quando o LT = \$ 35, os sinistros assumidos pelo ressegurador serão:

25 sinistros de \$ 5 e 15 sinistros de \$ 15.

Logo; $n' = 40 \rightarrow \lambda = 40$

$$E[X] = \frac{25 \times \$5 + 15 \times \$15}{40} = \$8{,}75$$

$$E[X^2] = \frac{25 \times \$5^2 + 15 \times \$15^2}{40} = \$100$$

$$E[S^{col}] = \lambda E[X] = 40 \times \$8{,}75 = \$350$$

$$V[S^{col}] = \lambda E[X^2] = 40 \times \$100 = \$4.000 \rightarrow \sigma[S^{col}] = \$63{,}25$$

O total de prêmio puro anual de resseguro, então, será:

$$P = \$350 + 2{,}33 \times \$63{,}25 = \$497{,}37$$

Logo; a taxa pura anual de resseguro aplicada sobre π será:

$$\frac{P}{\pi} = \frac{\$497{,}37}{\$15.000} = 3{,}32\%$$

E a taxa comercial anual de resseguro, considerando o carregamento para despesas de 20%, será:

$$\frac{3{,}32\%}{0{,}8} = 4{,}15\%$$

Observe que, ao aumentarmos o LT de \$ 20 para \$ 35, o que representa um aumento de 75%, a taxa de excesso de danos caiu de 12,69% para 4,15%, ou seja, caiu a menos de 1/3 da taxa anterior. Isto ocorre pelo fato de a maior concentração na distribuição do valor de 1 sinistro ocorrer nos baixos valores, o que ajuda a reduzir desproporcionalmente a taxa de excesso de danos quando a seguradora decide por assumir responsabilidades maiores de sinistros.

Por causa disto, é importante que as taxas de excesso de danos sejam revistas periodicamente para eliminar os efeitos da inflação. Uma inflação elevada pode aumentar muito os sinistros brutos da seguradora, transferindo mais responsabilidade para o ressegurador, caso o LT seja mantido constante. O ideal é que a taxa de excesso de danos seja função do LT fixado em uma moeda estável.

Exemplo 3

Seja uma carteira de seguros com freqüência de sinistros (f_{seg}) de 5% e o valor de 1 sinistro bruto (X) com distribuição Log Normal ($\mu = \$6, \sigma = \$0{,}3$). Calcular a freqüência de sinistros para o ressegurador em um contrato de excesso de danos com LT igual a \$ 550.

Resposta:

Dado que o ressegurador assume somente sinistros que ultrapassam o LT, então, o número esperado de sinistros para o ressegurador deverá ser igual ao número esperado de sinistros para o segurador multiplicado pela probabilidade de o valor de 1 sinistro bruto ultrapassar o LT.

Logo; a freqüência de sinistros para o ressegurador (f_{res}) será de:

$$f_{res} = f_{seg} \times P(X > LT)$$

$$f_{res} = 0{,}05 \times P(X > \$550) = 0{,}05 \times P(\ln X > \ln \$550)$$

$$f_{res} = 0{,}05 \times P\left(\frac{\ln X - \mu}{\sigma} > \frac{\ln \$550 - \mu}{\sigma}\right) = 0{,}05 \times P\left(Z > \frac{\ln \$550 - \$6}{\$0{,}3}\right)$$

$$f_{res} = 0{,}05 \times P(Z > 1{,}03) = 0{,}05 \times 0{,}1515 = 0{,}76\%$$

CONTRATO DE CATÁSTROFE

O contrato de catástrofe previne o pagamento de elevadas indenizações em um mesmo evento, como, por exemplo, o pagamento de 30 LTs pela morte de 40 pessoas na queda de um avião.

Normalmente existe um limite de catástrofe assumido pela seguradora em função de um múltiplo do seu limite técnico. Sempre que em um mesmo evento vários riscos de uma mesma seguradora são atingidos e, desde que a soma das indenizações ultrapasse um múltiplo do LT, o ressegurador assume a responsabilidade excedente. Neste caso, o prêmio de resseguro é função do prêmio retido pela seguradora.

O processo de precificação dos contratos de catástrofe exige a utilização de experiência de sinistros de longo prazo, observando possíveis sazonalidades e concentrações de risco. Dada a característica do risco, é comum se utilizar técnicas estatísticas de séries temporais. Devemos utilizar, também, curvas de sinistros com cauda longa, como a distribuição de Pareto*.

CONTRATO DE *STOP LOSS*

– **Contrato de *Stop Loss* por Limite de Sinistralidade**

Neste contrato a seguradora assume os sinistros até um limite máximo de sinistralidade. O limite de sinistralidade pode ser, por exemplo, de 70% ou 80%, sendo esses escolhidos pela seguradora de modo que a seguradora não apresente prejuízos na sua operação.

Modelo:

$S \leq K\pi \;\rightarrow$ não há recuperação

$S > K\pi \;\rightarrow$ a seguradora recupera $S - K\pi$

Onde:

K – Limite de sinistralidade;

S – Variável aleatória "valor total dos sinistros em 1 ano";

π – Prêmio comercial da carteira em 1 ano.

* Ver FERREIRA, Paulo Pereira. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Rio de Janeiro: Funenseg, 1ª reimpressão, 1ª edição, 2005.

Seja R a variável aleatória que representa o volume de recuperação por este tipo de contrato.

Dado que $\pi = P/(1-\alpha)$, sendo α o carregamento para despesas, e que o limite de sinistralidade é igual a K, logo:

$$R = \begin{cases} 0 & S \leq K\dfrac{P}{1-\alpha} \\ S - \dfrac{KP}{1-\alpha} & S > K\dfrac{P}{1-\alpha} \end{cases}$$

Assim sendo, podemos calcular $E[R]$, conforme a seguir:

$$E[R] = \int_{\frac{kP}{1-\alpha}}^{\infty} \left(x - \frac{KP}{1-\alpha} \right) f_S(x)dx$$

$$= \int_0^{\infty} \left(x - \frac{KP}{1-\alpha} \right) f_S(x)dx - \int_0^{\frac{kP}{1-\alpha}} \left(x - \frac{KP}{1-\alpha} \right) f_S(x)dx$$

$$= E[S] - \frac{KP}{1-\alpha} - \int_0^{\frac{kP}{1-\alpha}} \left(x - \frac{KP}{1-\alpha} \right) f_S(x)dx$$

Veja que é possível determinar a distribuição de R e, desta forma, calcular o prêmio de resseguro. Se utilizarmos o princípio do valor esperado, o prêmio de resseguro será:

$$E[R](1+\theta)$$

Podemos afirmar que este contrato é uma variante do contrato de resseguro stop loss por limite de perda, que será visto a seguir.

– **Contrato de *Stop Loss* por Limite de Perda**

Neste contrato a seguradora assume um limite anual global de retenção de sinistros. Acima deste limite a resseguradora paga a diferença.

Seja I_d a variável aleatória "volume de recuperações dado um limite de retenção igual a d".

Logo;

$$I_d = \begin{cases} 0 & S \leq d \\ S - d & S > d \end{cases}$$

$$S - I_d = \begin{cases} S & S \leq d \\ d & S > d \end{cases}$$

Onde $S - I_d$ é o volume de sinistro retido pela seguradora.

Assim sendo, o prêmio de risco de resseguro será:

– ***Caso de S Contínuo***

$$E[I_d] = \int_d^{\infty} (x-d) f_S(x)dx$$

$$= \int_0^\infty (x-d) f_S(x)\,dx - \int_0^d (x-d) f_S(x)\,dx$$

$$= E[S] - d + \int_0^d (d-x) f_S(x)\,dx$$

Ou, então, a partir de $F_S(x)$

$$E[I_d] = \int_d^\infty (x-d) f_S(x)\,dx$$

$$= \int_d^\infty (d-x) \frac{d}{dx}(1-F_S(x))\,dx$$

$$= (d-x)(1-F_S(x))\Big|_d^\infty + \int_d^\infty (1-F_S(x))\,dx$$

$$= \int_d^\infty (1-F_S(x))\,dx$$

Ou, então:

$$E[I_d] = E[S] - d + \int_0^d (d-x) f_S(x)\,dx$$

$$= E[S] - d - \int_0^d (d-x) \frac{d}{dx}(1-F_S(x))\,dx$$

$$= E[S] - d - (d-x)(1-F_S(x))\Big|_0^d - \int_0^d (1-F_S(x))\,dx$$

$$= E[S] - d + d - \int_0^d (1-F_S(x))\,dx$$

$$= E[S] - \int_0^d (1-F_S(x))\,dx$$

– ***Caso de S Discreto***

Vejamos as 4 fórmulas de cálculo de $E[I_d]$ correspondentes ao caso contínuo:

$$E[I_d] = \sum_{x=d+1}^{\infty} (x-d) f_S(x)$$

$$E[I_d] = E[S] - d + \sum_{x=0}^{d-1} (d-x) f_S(x)$$

$$E[I_d] = \sum_{x=d}^{\infty} (1-F_S(x))$$

$$E[I_d] = E[S] - \sum_{x=o}^{d-1} (1 - F_S(x))$$

A partir da relação $E[I_d] = \sum_{x=d}^{\infty} (1 - F_S(x))$ podemos obter uma fórmula recursiva, qual seja:

$$E[I_{d+1}] = E[I_d] - (1 - F_S(d)) \qquad d = 0,1,2,\ldots$$

Onde $E[I_o] = E[S]$

Exemplo 4

Uma sociedade seguradora paga benefícios por morte de um segurado no valor fixo de $ 100. O número esperado de mortes é de 1 por ano. A seguradora tem um contrato de resseguro de *stop loss*, no qual o número de mortes excedentes a 2, em 1 ano, a resseguradora paga os benefícios de morte subseqüentes. Qual o prêmio de risco de resseguro (P), dado que N possui distribuição de Poisson?

Resposta:

$$P = \$100 \sum_{K=3}^{\infty} (K-2) P(N = K)$$

$$P = \$100 \sum_{K=3}^{\infty} (K-2) \frac{e^{-1} 1^K}{K!}$$

$$P = \$100\, e^{-1} \left(\sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} - 2 \sum_{K=3}^{\infty} \frac{1}{K!} \right)$$

$$P = \$100\, e^{-1} \left(\sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} - 2 - 2 \sum_{K=0}^{\infty} \frac{1}{K!} + 2 \times 2{,}5 \right)$$

$$P = \$100\, e^{-1} (e - 2 - 2e + 5)$$

$$P = \$10{,}4$$

Exemplo 5

Sejam $f_S(x)$ e $F_S(x)$ definidos conforme a seguir. Calcule o prêmio de risco para um resseguro de *stop loss* com limite fixo de $ 30.

x($)	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	0.15	0,15
5	0,2	0,35
10	0,25	0,60
15	0,14	0,74
20	0,12	0,86
25	0,08	0,94
30	0,03	0,97
35	0,02	0,99
40	0,01	1,00

Resposta:

A distribuição de I_{30} será:

x($)	$f_{I_{30}}(x)$
0	0,97
5	0,02
10	0,01

Logo:

$$E[I_{30}]=\sum_{x=35}^{40}(x-30)f_S(x)=\$5\times 0{,}02+\$10\times 0{,}01=\$0{,}20$$

Ou, então:

$$E[I_{30}]=\sum_{x=30}^{40}(1-F_S(x))=\$5\times(1-0{,}97)+\$5\times(1-0{,}99)+\$1\times(1-1)=\$0{,}20$$

Observe que, pelo segundo método, temos que considerar $F_S(x)$ em todos os 11 números inteiros compreendidos entre 30 e 40.

Distribuição do Sinistro Retido

Sejam:

X_{RET} – Variável aleatória "valor de 1 sinistro retido";

$F_{X_{RET}}(x)$ – Função de distribuição de X_{RET};

$F_X(x)$ – Função de distribuição do valor de 1 sinistro bruto.

Vejamos a seguir como determinar $F_{X_{RET}}(x)$ para diversos contratos de resseguro, em função de $F_X(x)$

Contrato de Excesso de Danos

$$F_{X_{RET}}(x)=\begin{cases} F_X(x) & x<LT \\ 1 & x\geq LT \end{cases}$$

Contrato de Excesso de Danos Conjugado com um Contrato de Quota-Parte

Seja K a quota de cessão de resseguro, então:

$$F_{X_{RET}}(x)=\begin{cases} F_X\left(\dfrac{1}{1-K}\,x\right) & x<LT \\ 1 & x\geq LT \end{cases}$$

Contrato de Excedente de Responsabilidade

$$F_{X_{RET}}(x)=\begin{cases} F_X\left(\dfrac{IS}{LT}\,x\right) & IS > LT \\ \\ F_X(x) & IS \le LT \end{cases}$$

Onde, $X_{RET} = \dfrac{LT}{IS}\,x$

Exemplo 6

Determinar uma expressão para $f_{X_{RET}}(x)$ e $E\left[X_{RET}^K\right]$ em um contrato de excesso de danos.

Resposta:

Para sinistros brutos com valor até o LT, o sinistro retido será igual ao sinistro bruto. Já para sinistros brutos superiores ao LT, o sinistro retido será igual ao LT, de modo que a probabilidade do sinistro retido ser igual ao LT é igual à probabilidade do sinistro bruto ser superior ou igual ao LT. Desta forma, então:

$$f_{X_{RET}}(x)=\begin{cases} f_X(x) & x < LT \\ \\ 1-F_X(LT) & x = LT \\ \\ 0 & x > LT \end{cases}$$

Logo;

$$E\left[X_{RET}^K\right]=\int_0^{LT} x^K f_X(x)dx + LT^K\left(1-F_X(LT)\right)$$

Exemplo 7

Seja X com uma distribuição Exponencial ($\alpha = 1/\$50.000$) em uma carteira com contrato de resseguro de excesso de danos, com limite técnico de \$100.000. Determinar:

a) A função de densidade de X_{RET};
b) A média e a variância de X_{RET}.

Resposta:

a) Função de densidade de X_{RET}

Dado que X possui distribuição Exponencial ($\alpha = 1/\$50.000$), então,

$$f_X(x)=\begin{cases} 1/50.000e^{-1/50.000x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-1/50.000x} & x\geq 0\\ 0 & x>0\end{cases}$$

Desta forma, pelo exemplo anterior, temos:

$$f_{X_{RET}}(x)=\begin{cases}1/50.000\,e^{-1/50.000x} & 0\leq x<100.000\\ e^{-2} & x=100.000\\ 0 & x>100.000 \quad \text{e} \quad x<0\end{cases}$$

Onde, $f_{X_{RET}}(100.000)=P(X>100.000)=1-P(X\leq 100.000)=e^{-1/50.000x100.000}=e^{-2}$

b) Média e variância de X_{RET}

Sabemos, também, pelo exemplo anterior, que:

$$E[X_{RET}]=\int_0^{LT} x f_X(x)dx+LT(1-F_X(LT))$$

$$E[X_{RET}]=\int_0^{100.000} x\frac{1}{50.000}e^{-1/50.000x}\,dx+100.000\,e^{-2}$$

$$E[X_{RET}]=-xe^{-1/50.000x}\Big|_0^{100.000}+\int_0^{100.000} e^{-1/50.000x}\,dx+13.534$$

$$E[X_{RET}]=-100.000\,e^{-2}-50.000\,e^{-1/50.000x}\Big|_0^{100.000}+13.534$$

$$E[X_{RET}]=-13.534-50.000\,e^{-2}+50.000+13.534$$

$$E[X_{RET}]=\$43.233$$

$$E[X_{RET}^2]=\int_0^{100.000} x^2\frac{1}{50.000}e^{-1/50.000x}\,dx+100.000^2\,e^{-2}$$

$$E[X_{RET}^2]=-x^2\,e^{-1/50.000x}\Big|_0^{100.000}+\int_0^{100.000} 2x\,e^{-1/50.000x}\,dx+100.000^2\,e^{-2}$$

$$E[X_{RET}^2]=-100.000^2\,e^{-2}-100.000x\,e^{-1/50.000x}\Big|_0^{100.000}+100.000\int_0^{100.000} e^{-1/50.000x}\,dx+100.000^2\,e^{-2}$$

$$E[X_{RET}^2]=-100.000^2\,e^{-2}-5.000.000.000\,e^{-1/50.000x}\Big|_0^{100.000}$$

$$E[X_{RET}^2]=-100.000^2\,e^{-2}-5.000.000.000\,e^{-2}+5.000.000.000$$

$$E[X_{RET}^2]=\$2.969.900.000$$

Logo; $V[X_{RET}]=\$2.969.900.000-\$43.233^2=\$1.100.807.711$

E, $\sigma[X_{RET}]=\sqrt{V[X_{RET}]}=\$33.178$

A distribuição de X_{RET}, neste caso, é chamada distribuição Exponencial Truncada.

Exercícios

1) Calcular o total de prêmio puro de resseguro anual em um contrato de excesso de danos, dados:
   - O sinistro agregado do ressegurador possui distribuição Binomial Negativa Composta ($r = 1.000$, $p = 0{,}8$), podendo ser aproximada por uma Normal;
   - Nível de significância de 2,5% de modo que o sinistro agregado assumido pelo ressegurador em 1 ano não ultrapasse o total de prêmio puro anual de resseguro;
   - LT=$ 15
   - $E[X]$ e $E[X^2]$ do ressegurador são aproximados pelos momentos amostrais do valor observado de 1 sinistro;
   - Distribuição de freqüência dos valores de sinistros:

x ($)	10	20	30	40	50
$P(X = x)$	0,3	0,4	0,18	0,08	0,04

2) Seja uma carteira de seguros com freqüência de sinistros (f_{seg}) de 1% e o valor de 1 sinistro bruto (X) com distribuição conforme o exercício 1. Calcular a freqüência de sinistros para o ressegurador em um contrato de excesso de danos com LT igual a $ 20.

3) Seja S^{col} com distribuição Gama (x, α, β), onde $F_{S^{col}}(x) = G(x, \alpha, \beta)$. Mostre que:
$$E[I_d] = \frac{\alpha}{\beta}[1 - G(d, \alpha + 1, \beta)] - d[1 - G(d, \alpha, \beta)]$$

4) Suponha que o ressegurador assume um risco de pagar 80% dos sinistros agregados que ultrapassam um limite d, sujeito a um limite máximo de pagamento de m. Determine uma expressão para o prêmio de risco do ressegurador em função do prêmio de risco de um resseguro *stop loss* tradicional (sem limite de pagamento e sem o fator de 80%).

5) Calcular $P(S_{RET} > P_{RET})$ no exemplo 10.1, supondo que LT = $ 20, considerando o resseguro.

APLICAÇÕES DIVERSAS

Serão apresentados, a seguir, diversos instrumentos práticos de um contrato de seguro, tais como: franquia, seguros proporcionais ou não proporcionais e reintegração automática da importância segurada. Para cada um desses instrumentos será desenvolvido o processo de precificação correspondente.

Será demonstrada, também, uma fórmula prática, utilizada por muito tempo no mercado segurador brasileiro para a tarifação especial de um seguro de Vida em Grupo.

Aplicações Práticas na Precificação

A distribuição da variável aleatória "valor total de sinistros em 1 ano" (S^{col}) pode ser aproximada pela distribuição Normal, sendo excelente essa aproximação na cauda à direita da distribuição. Esta característica é muito útil no processo de precificação, por ser a cauda à direita da distribuição a região de interesse quando se precifica, e pela facilidade de se trabalhar com a distribuição Normal.

Vejamos a seguir algumas situações práticas de cálculo do preço do seguro, aplicando a aproximação Normal para o sinistro agregado (S^{col}), supondo que a distribuição do número de sinistros (N) é uma Poisson (λ). Para tal, vejamos inicialmente como determinar os parâmetros envolvidos neste tipo de cálculo, quais sejam: λ, $E[X^K]$, P e P_l.

Cálculo de λ

O valor de λ poderá ser uma observação anual do número de sinistros (n') ou, então, poderemos trabalhar com o limite superior do intervalo de confiança, qual seja:

$$\lambda = E[N] = n' + Z_{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{n'(n-n')}{n}}$$

Na verdade, o uso do limite superior do intervalo de confiança representa uma segurança adicional no cálculo do preço do seguro, pois as fórmulas de cálculo em si já contêm níveis de segurança implícitos.

Cálculo de $E[X^K]$

Podemos calcular $E[X^K]$ de duas formas:

Quando X Possui Distribuição Paramétrica Conhecida

$$E[X^K] = \int_0^\infty x^K f_X(x)\,dx$$

A Partir dos Valores Observados de X

$$E[X^K] = \frac{\sum_{i=1}^{n'} Z_i^K}{n'}$$

Onde Z_i é o valor observado do i-ésimo sinistro.
Cálculo do Prêmio Puro Total (P)
Sabemos que P deve ser determinado de modo que:

$$P\left(S^{COL} > P\right) = \alpha \rightarrow P = E\left[S^{COL}\right] + Z_{1-\alpha}\sigma\left[S^{COL}\right]$$

$$P = \lambda E[X] + Z_{1-\alpha}\sqrt{\lambda E\left[X^2\right]}$$

Cálculo do Prêmio Puro Individual (P_I)
Seja F a referência de cálculo.

Logo; $P_I = \dfrac{P}{F}$

Precificação de Seguros com Franquia

A franquia representa um instrumento muito importante no processo de precificação, pois torna o segurado mais cuidadoso na proteção do seu risco, além de proporcionar uma redução significativa nos custos com a regulação de sinistros de baixo valor. Como normalmente a distribuição do valor de 1 sinistro (X) possui alta concentração em torno dos pequenos valores, a redução no preço do seguro pode ser significativa com a aplicação da franquia.

Uma abordagem ampla sobre as distribuições de X após a aplicação da franquia, pode ser vista em (HOGG AND KLUGMAN)[9].

Existem 3 tipos de franquia, quais sejam:

Franquia Proporcional

CONCEITO

Neste caso, o segurado participa com um percentual pré-definido ($K\%$) em todos os sinistros.

Este tipo de franquia possui o inconveniente de penalizar demais os segurados nos sinistros de alto valor. É comum utilizar este tipo de franquia com um limite máximo de franquia em valor absoluto.

MODELO ATUARIAL

Sejam:

i) λ_d – Número médio de sinistros após a aplicação da franquia;

ii) X_d – Variável aleatória "valor de 1 sinistro líquido da franquia";

iii) P_d – Prêmio de risco após a aplicação da franquia.

Então:

$$\lambda_d = \lambda$$

$$X_d = (1-K)X$$

$$f_{X_d}(x) = f_X\left(\frac{x}{1-K}\right)$$

$$E[X_d] = (1-K)E[X]$$

$$P_d = \lambda_d \, E[X_d] = \lambda(1-K)E[X]$$

Veja que o prêmio de risco após a aplicação da franquia percentual é igual ao prêmio de risco original, antes da aplicação da franquia, multiplicado por $1-K$.

Franquia Dedutível

CONCEITO

Na franquia dedutível, o segurado participa integralmente dos sinistros cujos valores não ultrapassam o valor pré-definido da franquia dedutível (d). Quando o valor do sinistro ultrapassa esse limite, a indenização a ser paga ao segurado representa a diferença entre o valor do sinistro e o valor da franquia dedutível.

MODELO ATUARIAL

$$\lambda_d = \lambda P(X > d)$$

$$X_d = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ X - d & x > d \end{cases}$$

$$f_{X_d}(x) = \frac{f_X(x+d)}{P(X > d)} \qquad x \geq 0$$

$$E[X_d] = \int_d^\infty (x-d)\frac{f_X(x)}{P(X > d)}\, dx$$

$$P_d = \lambda_d \, E[X_d] = \lambda \int_d^\infty (x-d) f_X(x)\, dx$$

É fácil provar que o prêmio de risco acima é inferior ao prêmio de risco original, antes da aplicação da franquia dedutível, pois:

$$P_d = \lambda \int_d^\infty (x-d) f_X(x)\, dx \leq \lambda \int_0^\infty x\, f_X(x)\, dx = \lambda E[X]$$

Franquia Simples

CONCEITO

Assim como na franquia dedutível, o segurado participa integralmente dos sinistros cujos valores não ultrapassam o valor pré-definido da franquia simples (d). Sempre que o sinistro ultrapassa esse limite, o segurado é indenizado pelo valor total do sinistro, e não pela diferença, como no caso da franquia dedutível.

Este tipo de franquia pode incentivar a fraude por parte do segurado, nas situações em que o valor do sinistro é muito próximo ao limite de franquia simples, pois o segurado pode fraudulentamente agravar o valor do sinistro para que este ultrapasse o limite de franquia, recebendo, assim, o valor total do sinistro.

MODELO ATUARIAL

$$\lambda_d = \lambda P(X > d)$$

$$X_d = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ X & x > d \end{cases}$$

$$f_{X_d}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq d \\ \dfrac{f_X(x)}{P(X > d)} & x > d \end{cases}$$

$$E[X_d] = \int_d^{\infty} x \frac{f_X(x)}{P(X > d)} dx$$

$$P_d = \lambda_d E[X_d] = \lambda \int_d^{\infty} x f_X(x) dx$$

É fácil provar que o prêmio de risco acima é inferior ao prêmio de risco original, antes da aplicação da franquia simples, pois:

$$P_d = \lambda \int_d^{\infty} x f_X(x) dx \leq \lambda \int_0^{\infty} x f_X(x) dx = \lambda E[X]$$

Exemplo 8

Calcular a taxa pura individual anual em uma carteira de seguros com as seguintes características:

- S^{col} possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma distribuição Normal;
- O número médio de sinistros λ será estimado pelo número observado de sinistros em 1 ano;
- Total de importância segurada exposta ao risco em 1 ano é de $ 1.500.000;
- Franquia simples de $ 200;
- Nível de significância (α) para o cálculo do prêmio puro é de 5% $\rightarrow Z_{1-\alpha} = 1{,}645$;
- Relação de sinistros brutos em 1 ano:

Valor Sinistro ($)	Freqüência Absoluta
100	500
200	350
300	250
400	150
500	100
600	80
700	10

Resposta:

A relação de sinistros em 1 ano, líquidos da franquia simples de $ 200, será:

Valor Sinistro Líquido ($)	Freqüência Absoluta
300	250
400	150
500	100
600	80
700	10

Onde, $n' = 250 + 150 + 100 + 80 + 10 = 590$

$\rightarrow \lambda = n' = 590$

$$E[X_d] = \frac{250 \times \$300 + 150 \times \$400 + 100 \times \$500 + 80 \times \$600 + 10 \times \$700}{590} = \$406{,}78$$

$$E[X_d^2] = \frac{250 \times \$300^2 + 150 \times \$400^2 + 100 \times \$500^2 + 80 \times \$600^2 + 10 \times \$700^2}{590} = \$178.305$$

Logo;

$$P = \lambda E[X_d] + Z_{1-\alpha}\sqrt{\lambda E[X_d^2]} = 590 \times \$406{,}78 + 1{,}645\sqrt{590 \times \$178.305} = \$256.872{,}48$$

$$P_I = \frac{P}{F} = \frac{\$256.872{,}48}{\$1.500.000} = 17{,}12\%$$

Exemplo 9

Refazer o exemplo anterior supondo uma franquia percentual de 20%, limitada a um mínimo de $ 50 e um máximo de $ 100, sob a forma de franquia dedutível.

Resposta:

A relação de sinistros em 1 ano líquidos da franquia será:

Valor Sinistro Líquido ($)	Freqüência Absoluta
50	500
150	350
240	250
320	150
400	100
500	80
600	10

Onde, $n' = 500 + 350 + 250 + 150 + 100 + 80 + 10 = 1440$

$\rightarrow \lambda = n' = 1440$

$$E[X_d] = (500 \times \$50 + 350 \times \$150 + 250 \times \$240 + 150 \times \$320 + 100 \times \$400$$
$$+ 80 \times \$500 + 10 \times \$600) / 1.440 = \$188,54$$
$$E[X_d^2] = (500 \times \$50^2 + 350 \times \$150^2 + 250 \times \$240^2 + 150 \times \$320^2 + 100 \times \$400^2$$
$$+ 80 \times \$500^2 + 10 \times \$600^2) / 1.440 = \$54.503,47$$

Logo;

$$P = \lambda E[X_d] + Z_{1-\alpha}\sqrt{\lambda E[X_d^2]} = 1.440 \times \$188,54 + 1,645\sqrt{1.440 \times \$54.503,47} = \$286.070,94$$
$$P_I = \frac{P}{F} = \frac{\$286.070,94}{\$1.500.000} = 19,07\%$$

Cuidados na Precificação de Seguros com Franquia

Devemos tomar muito cuidado na precificação de carteiras que estiveram sujeitas à aplicação da franquia simples ou dedutível, principalmente quando se quer reduzir o valor da franquia, ou, até mesmo, eliminar a franquia.

O problema surge pelo fato de que os sinistros, cujos valores são inferiores ao valor da franquia, não são registrados pela seguradora, ficando difícil a sua estimativa.

Estudos tarifários para a elevação da franquia são facilmente realizados, bastando considerar que a nova experiência de sinistros, após a elevação da franquia, terá os seus valores de sinistros reduzidos do valor correspondente ao acréscimo de franquia (no caso da franquia dedutível, por exemplo).

No caso de estudos para a redução ou eliminação da franquia, torna-se necessário analisar a distribuição do valor de 1 sinistro bruto (X), atribuindo-lhe uma distribuição *a priori*.

Exemplo 10

Seja uma experiência de 1.000 sinistros com média de \$ 2.000, em uma carteira que esteve sujeita à aplicação de uma franquia dedutível de \$ 800. Calcular o prêmio de risco total da carteira nas seguintes situações, supondo S^{col} com distribuição de Poisson Composta.

a) Manutenção da franquia em \$ 800;
b) Eliminação da franquia;
c) Redução da franquia para \$ 500.

Resposta:

a) Manutenção da franquia em \$ 800

Esta é a situação mais simples, pois não há nenhuma alteração na franquia, onde:

$\lambda_d = 1000$ e $E[X_d] = \$2.000$

Logo;

$$P = E[S^{col}] = \lambda_d E[X_d] = 1.000 \times \$2.000 = \$2.000.000$$

b) Eliminação da franquia

Nesse caso, precisamos atribuir uma distribuição de probabilidade para X.

Seja, então, $X \sim$ Exponencial (α)

Logo; $E[X_d] = \int_{800}^{\infty} \frac{(x-800) f_X(x)}{P(X>800)} dx$

$$E[X_d] = \int_{800}^{\infty} \frac{(x-800)\alpha e^{-\alpha x}}{P(X>800)} dx$$

Mas,

$$\int_{800}^{\infty} (x-800)\alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \int_{0}^{\infty} (x-800) e^{-\alpha x} dx - \alpha \int_{0}^{800} (x-800) e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} - 800 - \alpha \int_{0}^{800} x e^{-\alpha x} dx + 800\alpha \int_{0}^{800} e^{-\alpha x} dx$$

$$= \frac{1}{\alpha} - 800 + x e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{800} - \int_{0}^{800} e^{-\alpha x} dx - 800 e^{-\alpha x}\Big|_{0}^{800}$$

$$= \frac{1}{\alpha} - 800 + 800 e^{-800\alpha} + \frac{e^{-\alpha x}}{\alpha}\Big|_{0}^{800} - 800 e^{-800\alpha} + 800$$

$$= \frac{1}{\alpha} - 800 + \frac{e^{-800\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} + 800 = \frac{e^{-800\alpha}}{\alpha}$$

Como $E[X_d] = \$2.000$

Então:

$$E[X_d] = \frac{1}{P(X>800)} \frac{e^{-800\alpha}}{\alpha} = \frac{1}{e^{-800\alpha}} \frac{e^{-800\alpha}}{\alpha} = \$2.000 \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\$2.000} = 0{,}0005$$

Logo; $E[X] = \frac{1}{\alpha} = \$2.000$

Veja que $E[X_d]$ é igual a $E[X]$ e não varia com o valor da franquia.

Dado que o número médio de sinistros que ultrapassam a franquia de \$ 800 (λ_d) é igual a 1.000, então, o número médio de sinistro na carteira (λ) será:

$$\lambda = \frac{\lambda_d}{P(X>800)} = \frac{1.000}{e^{-800\alpha}} = \frac{1.000}{e^{-800\times 0{,}0005}} = 1.492$$

Logo; o prêmio de risco será:

$$P = \lambda E[X] = 1.492 \times \$2.000 = \$2.984.000$$

c) Redução da franquia para \$ 500

Neste caso, o número médio de sinistros acima da franquia (λ_d) será:

$$\lambda_d = \lambda \times P(x > \$500) = \lambda e^{-500\alpha} = \lambda e^{-500\alpha} = 1.492 \times e^{-500 \times 0,0005} = 1.162$$

A média do valor de 1 sinistro líquido da franquia ($E[X_d]$) será também igual a \$ 2.000, pois $E[X_d]$ não varia com o valor da franquia.

Logo; o prêmio de risco será:

$$P = \lambda_d E[X_d] = 1.162 \times \$2.000 = \$2.324.000$$

Precificação de Seguros a Primeiro Risco Absoluto e Cláusula de Rateio

Sejam:

VR – Valor em risco na ocasião do sinistro;

IS – Importância segurada;

SIN – Valor do prejuízo do segurado;

IND – Indenização paga pela seguradora;

P – Prêmio puro total da carteira;

$TAXA$ – Taxa pura em função da IS;

n – Número de expostos ao risco;

F – Referência de cálculo $\rightarrow F = n \times IS$;

Vejamos, a seguir, a conceituação de primeiro risco absoluto e cláusula de rateio, e vamos verificar a relação entre a importância segurada e a taxa nesses tipos de contratos. Para tal, testaremos a relação para duas importâncias seguradas: IS_1 e IS_2, onde $IS_2 > IS_1$.

Primeiro Risco Absoluto

O seguro a primeiro risco absoluto é aquele em que o segurador indeniza integralmente os prejuízos sofridos pelo segurado, limitando o valor da indenização ao valor da importância segurada.

CARACTERÍSTICAS

$IND = SIN \qquad SIN < IS$

$IND = IS \qquad SIN \geq IS$

COMPARAÇÃO PARA IS_1 E IS_2

a) IS_1

$$IND_1 = SIN \qquad SIN < IS_1$$
$$IND_1 = IS_1 \qquad SIN \geq IS_1$$
$$F_1 = nIS_1$$

b) IS_2

$$IND_2 = SIN \qquad SIN < IS_2$$
$$IND_2 = IS_2 \qquad SIN \geq IS_2$$
$$F_2 = nIS_2$$

Hipótese: $IS_2 = K\,IS_1 \qquad K > 1$

Conseqüências:

$$F_2 = K\,F_1$$

$K\,P_1 \geq P_2 \geq P_1$, pois, $K\,IND_1 \geq IND_2 \geq IND_1$

$$TAXA_2 = \frac{P_2}{F_2} \leq \frac{K\,P_1}{F_2} = \frac{K\,P_1}{K\,F_1} = TAXA_1$$

Conclusão:

Quanto maior a importância segurada, maior o prêmio puro total da carteira ($P_2 \geq P_1$) sem que esse prêmio puro total cresça necessariamente na mesma proporção ($P_2 \leq K\,P_1$). Conseqüentemente, menor é a taxa aplicável sobre a importância segurada ($TAXA_2 \leq TAXA_1$).

Cláusula de Rateio

Nos seguros com cláusula de rateio, sempre que a importância segurada é inferior ao valor em risco no momento em que ocorre o sinistro, o segurado é considerado segurador de seu próprio risco. Desta forma, em caso de sinistro, o segurado assume os prejuízos na proporção da insuficiência da importância segurada em relação ao valor em risco.

Caso a importância segurada seja igual ou superior ao valor em risco no momento em que ocorre o sinistro, o segurado é indenizado em 100% do valor do sinistro.

CARACTERÍSTICAS

$$IND = SIN \qquad IS > VR$$
$$IND = \frac{IS}{VR}SIN \qquad IS \leq VR$$

COMPARAÇÃO PARA IS_1 e IS_2

Hipóteses:

i) A IS é sempre menor ou igual a VR;

ii) As apólices possuem o mesmo VR.

a) IS_1

$$IND_1 = \frac{IS_1}{VR} SIN$$

$$F_1 = nIS_1$$

b) IS_2

$$IND_2 = \frac{IS_2}{VR} SIN$$

$$F_2 = nIS_2$$

Hipótese:

$$IS_2 = K\,IS_1 \quad K > 1$$

Conseqüências:

$$F_2 = K F_1$$

$$P_2 = K P_1$$

Pois, $IND_2 = \frac{IS_2}{VR} SIN = K \frac{IS_1}{VR} SIN = K\,IND_1$

$$TAXA_2 = \frac{P_2}{F_2} = \frac{K P_1}{K F_1} = TAXA_1$$

Conclusão:

Quanto maior a IS, maior o prêmio puro total da carteira, sendo esse maior na mesma proporção do aumento da IS ($P_2 = K P_1$), enquanto que não se altera a taxa em função da IS ($TAXA_2 = TAXA_1$).

Exemplo 11

Calcular a taxa pura individual anual e o prêmio puro individual anual em uma carteira de seguros com as seguintes características:

– S^{col} possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma distribuição Normal;
– O número médio de sinistros λ será estimado pelo número observado de sinistros em 1 ano;
– Número de expostos ao risco em 1 ano (n) é de 1.000;
– Nível de significância (α) para o cálculo do prêmio puro é de 2,5% $\rightarrow Z_{1-\alpha} = 1{,}96$;
– Relação de sinistros brutos em 1 ano:

CLASSE	VALOR EM RISCO ($)	VALOR DO SINISTRO ($)	FREQUÊNCIA ABSOLUTA
I	100	100	20
II	100	80	10
III	200	20	8
IV	300	300	5
V	500	30	15
VI	500	400	2

Considere as seguintes situações:

a) 1º Risco absoluto para IS = $ 50 e IS = $ 100

b) Cláusula de rateio para IS = $ 50 e IS = $100

Resposta:

$n' = 20 + 10 + 8 + 5 + 15 + 2 = 60 \rightarrow \lambda = n' = 60$

Quando IS = $ 50 $\rightarrow F_1 = 1.000 \times \$50 = \$50.000$

Quando IS = $ 100 $\rightarrow F_1 = 1.000 \times \$100 = \$100.000$

a) 1º Risco absoluto

a1) IS = $ 50

Neste caso, exceto nas classes III e V, onde os sinistros líquidos serão de $ 20 e $ 30, respectivamente, nas outras classes serão de $ 50, logo;

$$E[X] = \frac{37 \times \$50 + 8 \times \$20 + 15 \times \$30}{60} = \$41$$

$$E[X^2] = \frac{37 \times \$50^2 + 8 \times \$20^2 + 15 \times \$30^2}{60} = \$1.820$$

Então, $P = 60 \times \$41 + 1{,}96\sqrt{60 \times \$1.820} = \$3.107{,}69$

$$P_I = \frac{P}{F_1} = \frac{\$3.107{,}69}{\$50.000} = 6{,}22\%$$

a2) IS = 100

Os sinistros líquidos nas 6 classes serão, respectivamente, de: $ 100 – $ 80 – $ 20 – $ 100 – $ 30 – $ 100.

Logo;

$$E[X] = \frac{27 \times \$100 + 10 \times \$80 + 8 \times \$20 + 15 \times \$30}{60} = \$68{,}50$$

$$E[X^2] = \frac{27 \times \$100^2 + 10 \times \$80^2 + 8 \times \$20^2 + 15 \times \$30^2}{60} = \$5.845$$

Então, $P = 60 \times \$68{,}50 + 1{,}96\sqrt{60 \times \$5.845} = \$5.270{,}71$

$$P_I = \frac{P}{F_2} = \frac{\$5270{,}71}{\$100.000} = 5{,}27\%$$

Veja que o aumento na IS implicou em uma redução na taxa pura.

b) Cláusula de Rateio

Os sinistros líquidos por classe serão:

CLASSE	IS = $ 50	IS = $ 100
I	50/100 × $100 = $ 50	$ 100
II	50/100 × $ 80 = $ 40	$ 80
III	50/200 × $ 20 = $ 5	100/200 × $ 20 = $ 10
IV	50/300 × $ 300 = $ 50	100/300 × $ 300 = $ 100
V	50/500 × $ 30 = $ 3	100/500 × $ 30 = $ 6
VI	50/500 × $ 400 = $ 40	100/500 × $ 400 = $ 80

b1) Cláusula de rateio com IS = $ 50

$$E[X]=\frac{20\times\$50+10\times\$40+8\times\$5+5\times\$50+15\times\$3+2\times\$40}{60}=\$30{,}25$$

$$E[X^2]=\frac{20\times\$50^2+10\times\$40^2+8\times\$5^2+5\times\$50^2+15\times\$3^2+2\times\$40^2}{60}=\$1.367{,}25$$

$$P=60\times\$30{,}25+1{,}96+1{,}96\sqrt{60\times\$1.367{,}25}=\$2.376{,}38$$

$$P_I=\frac{P}{F_1}=\frac{\$2.376{,}38}{\$50.000}=4{,}75\%$$

b2) Cláusula de rateio com IS = $ 100

$$E[X]=\frac{20\times\$100+10\times\$80+8\times\$10+5\times\$100+15\times\$6+2\times\$80}{60}=\$60{,}5$$

$$E[X^2]=\frac{20\times\$100^2+10\times\$80^2+8\times\$10^2+5\times\$100^2+15\times\$6^2+2\times\$80^2}{60}=\$5.469$$

$$P=60\times\$60{,}5+1{,}96\sqrt{60\times\$5.469}=\$4.752{,}76$$

$$P_I=\frac{P}{F_2}=\frac{\$4.752{,}76}{\$100.000}=4{,}75\%$$

Veja que, com o aumento da IS, a taxa pura permaneceu a mesma, e que a taxa pura com a cláusula de rateio é sensivelmente inferior àquela calculada para o 1º risco absoluto.

Precificação para a Reintegração Automática da Importância Segurada

Em alguns contratos de seguro é oferecida, opcionalmente, uma cláusula de reintegração automática da I.S., de modo que, em caso de sinistro de perda parcial, a apólice recupera a importância segurada original sem que essa seja reduzida pelo valor do sinistro.

Para precificar esta cláusula, precisamos separar os parâmetros de perda total e perda parcial. Sejam então:

f_{PP} – Freqüência anual de sinistros de perda parcial;

f_{PT} – Freqüência anual de sinistros de perda total;

f – Freqüência anual de sinistros = $f_{PP} + f_{PT}$;

π_R – Prêmio comercial anual da cláusula de reintegração automática;

$E[X_{PP}]$ – Valor médio de 1 sinistro de perda parcial;

θ – Carregamento de segurança;

C – Carregamento para despesas.

Logo, supondo que o sinistro de perda parcial ocorre em média no meio do ano, temos:

$$\pi_R = f_{PP} \times \frac{1}{2} \times f\,E[X_{PP}] \times \frac{(1+\theta)}{1-C}$$

Pois o sinistro médio desta cláusula ($f\,E[X_{PP}]$) representa o prêmio de risco que o segurado deveria pagar quando ocorre o sinistro (meio do ano), caso esta cláusula fosse facultativa. O fator 1/2 é aplicado, pois, no momento do sinistro, só restam 50% do período de vigência original.

Veja que, apesar da reintegração somente ocorrer em caso de sinistros de perda parcial, ela gera custos futuros para a seguradora também nos sinistros de perda total, pois esses seriam pagos com o valor reduzido do sinistro de perda parcial, caso a reintegração automática não fosse contratada. É por isso que se usa f como freqüência e não f_{PP}.

O valor de π_R pode, também, ser calculado da seguinte forma:

$$\pi_R = f \times \frac{1}{2} \pi_{PP}$$

Onde, π_{PP} é a parte do prêmio comercial do seguro correspondente à perda parcial.

O modelo acima pode ser aprimorado se estudarmos como evolui a ocorrência de sinistros de perda parcial e total em 1 ano, e como os seus respectivos valores se distribuem.

Exemplo 12

Calcular o quanto representa o custo de uma cláusula de reintegração automática da importância segurada sobre o prêmio comercial de um seguro com as seguintes características:

- Freqüência de sinistros de perda parcial é igual a 8,5%;
- Freqüência de sinistros de perda total é igual a 2,5%;
- Sinistro médio de perda parcial é igual a $ 30;
- Sinistro médio de perda total é igual a $ 200;
- Carregamento de segurança é igual a 5%;
- Carregamento para despesas de 40%.

Resposta:

O prêmio comercial anual do seguro pode ser calculado da seguinte forma:

$$\pi = \left(f_{pp}\,E[X_{PP}] + f_{PT}\,E[X_{PT}]\right) \times \frac{(1+\theta)}{(1-C)}$$

Onde, $E[X_{PT}]$ representa o valor médio de 1 sinistro de perda total.

Logo;

$$\pi = (8{,}5\% \times \$30 + 2{,}5\% \times \$200) \times \frac{1{,}05}{0{,}6} = \$13{,}3125$$

Já o prêmio comercial anual correspondente à perda parcial pode ser calculado da seguinte forma:

$$\pi_{PP} = f_{pp}\,E[X_{PP}] \times \frac{(1+\theta)}{(1-C)} = 8{,}5\% \times \$30 \times \frac{1{,}05}{0{,}6} = \$4{,}4625$$

Assim sendo, o prêmio comercial anual da cláusula de reintegração automática é de:

$$\pi_R = f \times \frac{1}{2}\pi_{PP} = (8{,}5\% + 2{,}5\%) \times \frac{1}{2} \times \$4{,}4625 = \$0{,}2454$$

E a proporção entre o prêmio comercial anual da cláusula de reintegração automática e o prêmio comercial do seguro é igual a:

$$\frac{\$0{,}2454}{\$13{,}2125} = 1{,}86\%$$

Tarifação Especial para Seguros de Vida em Grupo

Vejamos, a seguir, um modelo simplificado para calcular o desconto a ser concedido em uma carteira de Vida em Grupo, taxada em função de uma taxa média para o grupo, partindo-se de uma experiência de sinistralidade apurada em um determinado período. Em função de possíveis sazonalidades na ocorrência de sinistros, recomenda-se que o período de experiência seja de pelo menos 1 ano.

Neste modelo simplificado vamos utilizar a teoria do risco individual, considerando que S^{ind} pode ser aproximado por uma distribuição Normal e vamos considerar somente o risco de morte, apesar de que o modelo aqui apresentado serve, também, para os demais riscos existentes na carteira de Vida em Grupo.

Sejam:

i) S/P – Total de sinistros sobre total de prêmio puro anual, prêmio esse calculado em função da tábua de mortalidade escolhida para o grupo;

ii) n – Número de segurados (principais e cônjuges) expostos ao risco;

iii) q^G – Taxa média anual , não ajustada, observada no grupo;

iv) q' – Taxa média pura anual, ajustada, projetada pela experiência do grupo;

v) q^{TAB} – Taxa média pura anual, aplicando-se a tábua de mortalidade escolhida para o grupo.

Sabemos, pela teoria do risco individual, que o valor ajustado q', de modo que a probabilidade da freqüência efetiva de morte superar o valor ajustado q' seja de α, pode ser calculado pela seguinte fórmula:

$$q' = q\left(1 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1-q}{nq}}\right)$$

Onde q representa a probabilidade média de morte.

No caso da tarifação especial para uma carteira de Vida em Grupo, queremos ajustar uma nova taxa média partindo-se da suposição que a experiência de freqüência de sinistros do grupo no período analisado pode ser projetada para o futuro.

Desta forma, vamos considerar o valor de q como sendo a experiência observada do grupo, ou seja, q^G.

Logo;

$$q' = q^G\left(1 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1-q^G}{nq^G}}\right)$$

Podemos considerar, porém, q^G como sendo:

$$q^G = \frac{S}{P}\, q^{TAB}$$

Então:

$$q' = \frac{S}{P}\, q^{TAB}\left(1 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1 - SIP\; q^{TAB}}{n\, S/P\; q^{TAB}}}\right)$$

Assim sendo, o desconto (D) em relação a q^{TAB} será de:

$$D = \frac{q^{TAB} - q'}{q^{TAB}} = 1 - \frac{q'}{q^{TAB}}$$

$$D = 1 - \frac{S}{P}\left(1 + Z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{1 - SIP\; q^{TAB}}{n\, S/P\; q^{TAB}}}\right)$$

Esta fórmula nos mostra que:

$n \uparrow \quad D\uparrow$

$S/P\uparrow \quad D\downarrow$

$q^{TAB}\uparrow \quad D\uparrow$

Pode ser provado, também, que o desconto máximo a ser concedido por esta fórmula é de $1 - S/P$.

Pequenos valores de n, porém, proporcionarão $D < 0$, o que significa que ao invés de desconto temos uma agravação da taxa média em relação a q^{TAB}.

Exercícios

6) Determinar a relação entre X_d e X na situação em que existe uma franquia proporcional de $K\%$, limitada a um valor mínimo de c e a um valor máximo de d, sob a forma de franquia dedutível.

7) Calcular o desconto sobre o prêmio puro proporcionado pela aplicação de uma franquia dedutível de $ 100 em uma carteira de seguros com as seguintes características:
   - S^{col} possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma distribuição Normal;
   - O número médio de sinistros λ será estimado pelo número observado de sinistros em 1 ano;
   - Nível de significância (α) para o cálculo do prêmio puro é de 2,5%;
   - Relação de sinistros brutos em 1 ano:

Valor Sinistro ($)	Freqüência Absoluta
100	600
200	350
300	200
400	100
500	50
600	20
700	5

8) Calcular o prêmio comercial individual anual em uma carteira de seguros com as seguintes características:
   - S^{col} possui distribuição de Poisson Composta, podendo ser aproximada por uma distribuição Normal;
   - O número médio de sinistros λ será estimado pelo número observado de sinistros em 1 ano;
   - Seguro com cláusula de rateio;
   - Importância Segurada igual a $ 200;
   - Número de expostos ao risco em 1 ano (n) é de 5.000;
   - Nível de significância (α) para o cálculo do prêmio puro é de 1%;
   - Carregamento para despesas igual a 40%;
   - Relação de sinistros brutos em 1 ano:

CLASSE	VALOR EM RISCO ($)	VALOR DO SINISTRO ($)	FREQÜÊNCIA ABSOLUTA
I	200	200	500
II	300	100	100
III	200	40	50
IV	400	300	30
V	800	600	10

9) Calcular o prêmio comercial anual de uma cláusula de reintegração automática da importância segurada em um seguro em que a freqüência anual de ocorrência de sinistros é de 2%, o prêmio comercial é de $ 2.000, e a proporção entre o montante de sinistros de perda parcial e o montante total de sinistros é de 40%.

TEORIA DA CREDIBILIDADE

Aqui será abordado o processo de precificação a partir da chamada Teoria da Credibilidade. Por esse processo de precificação é possível conjugar a experiência da seguradora com a experiência de riscos similares, o que torna a Teoria da Credibilidade uma importante ferramenta para as seguradoras que possuem pouca massa de sinistros para utilizar no processo de tarifação.

Serão apresentados, ainda os principais modelos de precificação pela Teoria da Credibilidade, ilustrados com alguns exemplos práticos.

Conceito Básico

A Teoria da Credibilidade representa uma forma sistemática de atualização das tarifas dos seguros à medida em que a experiência de sinistros é disponibilizada.

A Teoria da Credibilidade se torna mais importante quando o volume de informações é muito pequeno, conduzindo a uma instabilidade muito grande na estimativa do preço do seguro. A solução defendida pela Teoria da Credibilidade é a utilização de experiência de riscos similares ou de riscos idênticos referentes a experiências de períodos anteriores, experiências essas conjugadas com a experiência mais recente do risco a ser precificado. É possível utilizar-se, no rol de riscos similares, a experiência de outras seguradoras ou, então, do mercado segurador.

É importante que o prêmio, assim obtido, seja atualizado no futuro com a experiência mais recente, conjugando-a com a experiência obtida pela Teoria da Credibilidade.

Sejam:

i) P_D – Prêmio de risco total da experiência direta da seguradora;

ii) P_A – Prêmio de risco total da experiência adicional a ser conjugada com a experiência direta da seguradora;

iii) P_C – Prêmio de risco total calculado pela Teoria da Credibilidade.

A forma de cálculo do prêmio de risco pela Teoria da Credibilidade é a seguinte:

$$P_C = ZP_D + (1-Z)P_A$$

Onde, Z é o fator de credibilidade, com valor situado entre 0 e 1, sendo este determinado a partir das experiências direta e adicional.

O valor de Z situa-se tão mais próximo de 1 quanto maior for o volume de informações da experiência direta de sinistros da seguradora. Quando $Z = 0$, nenhuma credibilidade é atribuída à experiência direta, e P_C será calculado tomando como base somente a experiência adicional.

Vejamos, a seguir, como precificar pela Teoria da Credibilidade, considerando que a variável aleatória "valor do sinistro agregado em 1 ano" (S^{col}) possui distribuição de Poisson Composta ($\lambda, f_X(x)$), sendo $\lambda = N\,p$, onde:

i) N – Número de expostos ao risco em 1 ano;

ii) p – Probabilidade de ocorrência de sinistros em 1 ano.

Credibilidade Total

Vejamos, a seguir, como determinar o número mínimo de expostos ao risco, ou de sinistros, da experiência direta, de modo que se possa desprezar a experiência adicional no processo de precificação pela Teoria da Credibilidade.

Na verdade, vamos assumir que a seguradora objetiva ter uma probabilidade muito grande ($(1-\tau)\%$) de que a estimativa de prêmio (P_C), usando somente a experiência direta, vai se distanciar muito pouco ($K\%$) do prêmio de risco real (P).

Como $S^{col} \sim$ Poisson Composta $(\lambda, f_X(x))$, logo;

$$E[S^{col}] = \lambda E[X] \quad V[S^{col}] = \lambda E[X^2]$$

$$P = \lambda E[X]$$

Assim sendo,

$$P((1-K)\lambda E[X] < P_D < (1+K)\lambda E[X]) \geq 1-\tau$$

$$\rightarrow \; P\left(\frac{-K\lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}} < \frac{P_D - \lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}} < \frac{K\lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}}\right) \geq 1-\tau$$

Se a experiência direta for suficientemente grande, e, supondo que a distribuição de probabilidade da amostra é igual à distribuição de probabilidade da população, então:

$\frac{P_D - \lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}}$ será aproximadamente Normal $(0,1)$.

Então, para determinar o número mínimo de sinistros ($\lambda_m = N_m p$) temos que ter:

$$\frac{K\lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}} = Z_{1-\frac{\tau}{2}}$$

Onde, $V[P_D] = \lambda E[X^2] = \lambda(V[X] + E[X]^2)$

Logo;

$$\frac{K\lambda E[X]}{\sqrt{\lambda(V[X] + E[X]^2)}} = Z_{1-\frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow \; K^2\lambda^2 E[X]^2 = Z^2_{1-\frac{\tau}{2}}\,\lambda(V[X] + E[X]^2)$$

Logo; o número mínimo de sinistros (λ_m) que satisfaz a equação acima em λ será:

$$\lambda_m = \left(\frac{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}{K}\right)^2 \left(\frac{V[X] + E[X]^2}{E[X]^2}\right)$$

$$\rightarrow \ \lambda_m = \left(\frac{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}{K}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma[X]}{E[X]}\right)^2\right)$$

Logo; o número mínimo de expostos ao risco (N_m) será:

$$N_m p = \left(\frac{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}{K}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma[X]}{E[X]}\right)^2\right)$$

$$\rightarrow \ N_m = \frac{1}{p}\left(\frac{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}{K}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\sigma[X]}{E[X]}\right)^2\right)$$

Observe que:

$K \quad \downarrow \qquad N_m \uparrow$

$p \quad \downarrow \qquad N_m \uparrow$

$1-\frac{\tau}{2} \uparrow \qquad N_m \uparrow$

$\frac{\sigma[X]}{E[X]} \uparrow \qquad N_m \uparrow$

Ou seja, o número mínimo de expostos ao risco cresce com a redução de K e p , e aumenta à medida em que $1-\frac{\tau}{2}$ e o coeficiente de variação de X aumentam.

Esta análise da credibilidade total é, sem dúvida, mais uma das maravilhas atuariais.

Exemplo 13

Calcular o número mínimo de sinistros requerido em uma experiência direta, de modo que haja uma probabilidade de 90% de que a distância entre o prêmio de risco real e o prêmio de risco calculado, utilizando 100% do prêmio de risco da experiência direta, não seja superior a 5%.

Suponha que os sinistros produzidos pela carteira (X) são constantes.

Resposta:

X constante $\rightarrow \quad \sigma[X] = 0 \ \rightarrow \ \lambda_m = \left(\frac{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}{K}\right)^2$

$$1-\tau = 90\% \rightarrow \quad \tau = 10\% \ \rightarrow \ Z_{1-\frac{\tau}{2}} = Z_{0,95} = 1{,}645$$

Sendo $K = 5\%$, logo;

$$\lambda_m = \left(\frac{1{,}645}{0{,}05}\right)^2 = 1.082$$

Exemplo 14

A freqüência de sinistros de uma carteira de seguros é de 3%, sendo $E[X] = \$1.000$ e $\sigma[X] = \$150$. Qual o tamanho mínimo do número de sinistros (λ_m) e do número de expostos ao risco (N_m), para que haja credibilidade total, com $K = 0{,}1$ e $1 - \tau = 0{,}95$?

Resposta:

$$\lambda_m = \left(\frac{Z_{0{,}975}}{0{,}1}\right)^2 \left(1 + \left(\frac{\$150}{\$1.000}\right)^2\right)$$

$$\lambda_m = \left(\frac{1{,}96}{0{,}1}\right)^2 \left(1 + 0{,}15^2\right) = 393$$

$\lambda_m = N_m p$, e, $p = 0{,}03$

$$\rightarrow \quad N_m = \frac{\lambda_m}{p} = \frac{393}{0{,}03} = 13.100$$

Credibilidade Parcial

No caso da credibilidade parcial, o interesse está em determinar o valor de Z que permite calcular o prêmio de risco total de forma ponderada com a experiência direta e a experiência adicional.

Vejamos, a seguir, alguns princípios que podem ser aplicados no cálculo de Z.

Princípio da Flutuação Limitada

Uma forma de se determinar o Z é a que utiliza o princípio da flutuação limitada, onde o prêmio de risco pela experiência adicional (P_A) é um valor fixo, e a seguradora objetiva ter uma probabilidade muito grande ($(1-\tau)\%$) de que a estimativa de prêmio, usando a Teoria da Credibilidade (P_C), vai se distanciar muito pouco (K %) do prêmio de risco real (p).

Como $P_C = ZP_D + (1 - Z)P_A$, e P_A é constante, então:

$$P\left(Z\lambda E[X] - K\lambda E[X] < ZP_D < Z\lambda E[X] + K\lambda E[X]\right) \geq 1 - \tau$$

$$\rightarrow \quad P\left(\frac{-K\lambda E[X]}{Z\sqrt{V[P_D]}} < \frac{P_D - \lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}} < \frac{K\lambda E[X]}{Z\sqrt{V[P_D]}}\right) \geq 1 - \tau$$

Se a experiência direta for suficientemente grande, e supondo que a distribuição de probabilidade da amostra é igual à distribuição de probabilidade da população, então:

$\frac{P_D - \lambda E[X]}{\sqrt{V[P_D]}}$ será aproximadamente Normal (0,1).

Logo;

$$\frac{K\lambda E[X]}{Z\sqrt{\lambda\left(V[X]+E[X]^2\right)}} = Z_{1-\frac{\tau}{2}}$$

$$\rightarrow Z = \frac{K\lambda E[X]}{Z_{1-\frac{\tau}{2}}\sqrt{\lambda\left(V[X]+E[X]^2\right)}}$$

$$\rightarrow Z = \sqrt{\left(\frac{K}{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}\right)^2 \frac{(\lambda E[X])^2}{\lambda\left(V[X]+E[X]^2\right)}}$$

$$\rightarrow Z = \sqrt{\left(\frac{K}{Z_{1-\frac{\tau}{2}}}\right)^2 \frac{\lambda}{1+\left(\frac{\sigma[X]}{E[X]}\right)^2}}$$

$$\rightarrow Z = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_m}}$$

Exemplo 15

Calcular o total de prêmio de risco a ser cobrado no próximo ano, na carteira do exemplo 14, caso essa contenha 10.000 apólices expostas ao risco que geram um total de \$ 500.000.000 de sinistros em 1 ano.

Considere que a experiência adicional conduziu a um total de prêmio de risco anual de \$ 55.000.

Resposta:

Vimos pelo exemplo 12.2 que: $\lambda_m = 393$ e $p = 0{,}03$.

Logo; o número esperado de sinistros em 1 ano (λ) será de:

$$\lambda = Np = 10.000 \times 0{,}03 = 300$$

Logo; $Z = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_m}} = \sqrt{\frac{300}{393}} = 0{,}8737$

O prêmio de risco total da experiência direta é de:

$$P_D = \frac{\$500.000.000}{10.000} = \$50.000$$

Logo; prêmio de risco total pela Teoria da Credibilidade será:

$$P_C = ZP_D + (1-Z)P_A = 0{,}8737 \times \$50.000 + 0{,}1263 \times \$55.000$$

$$\rightarrow \quad P_C = \$50.631{,}50$$

Princípio da Credibilidade Hiperbólica

A base deste princípio é que a credibilidade está associada ao volume do montante de sinistro agregado médio ($E = E[S^{col}] = \lambda E[X]$).

Desta forma, quanto maior o sinistro agregado médio da experiência direta (E), mais próximo Z estará de 1, sendo $Z = 0$ quando $E = 0$.

Por este princípio, a função Z cresce muito rapidamente para valores baixos de E, e cresce muito pouco, na medida em que E se torna muito elevado. Com isso, assume-se que a função Z em relação a E pode ser expressa por uma hipérbole, da seguinte forma:

$$Z = \frac{E}{E + C}$$

Onde, C é escolhido de forma subjetiva, sendo $C > 0$.

A função hiperbólica de Z pode ser visualizada no gráfico 1, sendo que essa curva se aproxima de $Z = 1$ de forma assintótica.

Na prática, entretanto, sabemos pelo tópico "Credibilidade Total" que, a partir de um determinado valor de λ (λ_m), temos a credibilidade total, ou seja, Z se aproxima de 1. Por conseqüência, Z se aproxima de 1 quando o sinistro agregado médio é igual a $\lambda_m E[X]$.

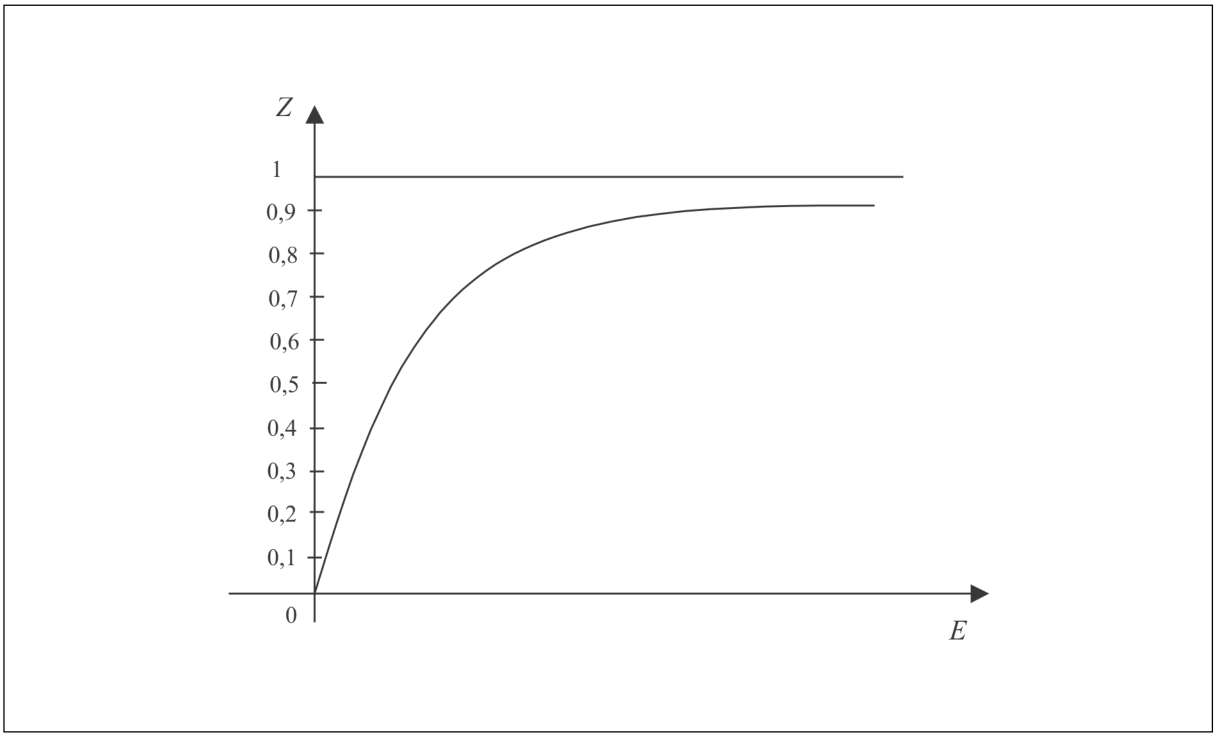

Gráfico 1

Uma modificação possível, portanto, na função Z, é a de atribuir um ponto S ($S = \lambda_m E[X]$) no qual a partir daí $Z = 1$, eliminando a característica assintótica da função original. Nesta nova função, assume-se que, a partir de um ponto ($E = Q,\ Z = Q/(Q+K)$), a função Z passa a ser uma reta até atingir $Z = 1$, conforme visualizado no gráfico 2.

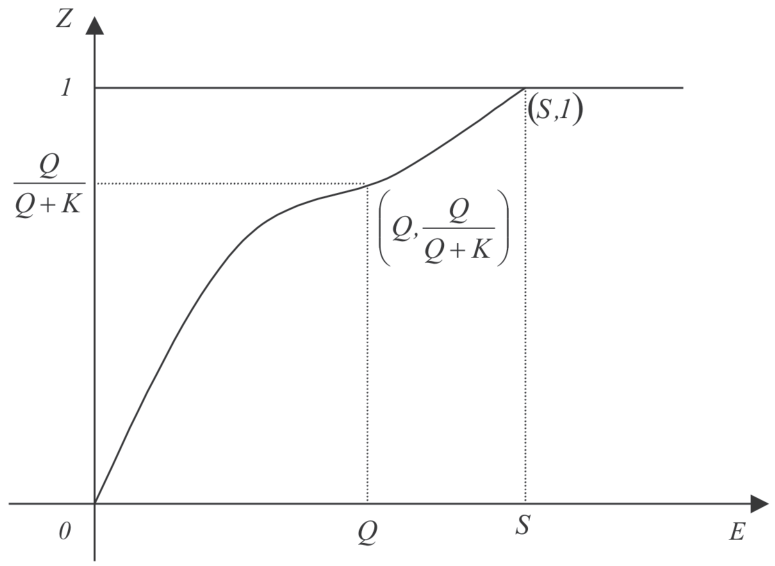

Gráfico 2

É fácil mostrar que esta nova função Z pode ser expressa por:

$$Z = \begin{cases} \dfrac{E}{E+C} & E \leq Q \\ 1 - \dfrac{4C(S-E)}{(S+C)^2} & Q < E < S \\ 1 & E > S \end{cases}$$

Sendo, $Q = \dfrac{S-C}{2}$

Dado que $C > 0$ e $Q > 0$, podemos afirmar que:

$0 < Q \leq S/2$ e $0 < C \leq S$

Essas expressões são importantes, pois permitem estabelecer limites para a escolha arbitrária de Q e C.

Comparação com o Princípio da Flutuação Limitada

Sabemos, pelo princípio da flutuação limitada, que a função Z pode ser expressa por:

$$Z = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_m}}$$

$$\rightarrow \; Z = \sqrt{\frac{\lambda E[X]}{\lambda_m E[X]}}$$

$$\rightarrow \; Z = \sqrt{\frac{E}{S}}$$

Desta forma, temos uma função Z que varia com E e S, podendo, então, ser comparada com a função Z do princípio da credibilidade hiperbólica, que depende de C, E e S.

Deve-se notar que, quando $C = S$, então, $Q = 0$, e, pelo gráfico 2, Z será uma reta, ou seja:

$$Z = \frac{E}{S}$$

Assim sendo, pode-se determinar o valor de C que torna o princípio da credibilidade hiperbólica próximo ao princípio da flutuação limitada.

Princípio da Credibilidade Bayesiana Empírica

Buhlmann (1967) publicou um artigo intitulado Experience Rating and Credibility que deu origem ao outro ramo da credibilidade denominado teoria da credibilidade européia ou teoria da credibilidade de maior exatidão ou ainda teoria da credibilidade bayesiana empírica. Com o surgimento dos modelos bayesianos empíricos, a estimação de Z pode ser feita usando estatísticas da teoria de estimação.

O modelo clássico de Buhlmann é o modelo simples de credibilidade linear para dados com o mesmo volume de risco. Este modelo é recomendado no caso de uso de valores de indenização que não exibam tendências.

Maiores detalhes sobre a Teoria da Credibilidade podem ser estudados em MANO e HART, BUCHANAN AND HOWE.

Exercícios

10) Calcular o número mínimo de sinistros requerido em uma experiência direta de modo que haja uma probabilidade de 95% de que a distância entre o prêmio de risco real, e o prêmio de risco calculado, utilizando 100% do prêmio de risco da experiência direta, não seja superior a 10%. Suponha que o número de sinistros ocorre de acordo com uma distribuição de Poisson, e que os valores dos sinistros produzidos pela carteira (C) possua a seguinte distribuição:

Valor Sinistro ($)	Freqüência Relativa
1.000	0,25
1.800	0,40
2.300	0,15
2.500	0,10
3.500	0,05
5.000	0,04
10.000	0,01

11) Calcular o valor de Z no exercício 10, utilizando o princípio da flutuação limitada, dado que o número médio de sinistros ocorridos é de 500.

12) Calcule o prêmio puro individual a ser cobrado no próximo ano, utilizando o princípio da flutuação limitada, em uma carteira com as seguintes características:
   - O número de sinistros ocorre de acordo com uma distribuição de Poisson;
   - Os valores dos sinistros são constantes e iguais a $ 10.000;
   - A freqüência anual de sinistros é de 0,001;
   - Número de sinistros ocorridos em 1 ano é igual a 300;
   - O carregamento de segurança é de 4%.

   Considere que a experiência adicional conduziu a um prêmio de risco individual anual de $ 11, sendo $K = 0{,}05$ e $1 - \tau = 0{,}95$.

BIBLIOGRAFIA

HART, D. G.; BUCHANAN, R. A.; HOWE, B. A. **The actuarial pratice of general Insurance-actuarial techniques for general insurance**. Sidney. Institute of Actuariaries of Australia, 1994, 2v.

HOGG, ROBERT V.; KLUGMAN STUART A. **Loss Distributions**. New York. John Wiley & Sons, Inc, 1984.

MANO C.M.C.A.B. **Melhoria da Qualidade na Tarifação de Seguros: Uso de Modelos de Credibilidade**. Tese submetida a COPPE da UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

TEIXEIRA, C.E.S., **Índices Estatístico-Atuariais para o Acompanhamento da Experiência em uma Carteira de Automóveis**. Tese submetida ao Instituto de Matemática da UFRJ, Rio de Janeiro, 1995.

WESTENBERGER, R. **Tarifação de Seguros de Automóveis**. COPPEAD, UFRJ , Rio De Janeiro, Dezembro 1989.

APÊNDICE 1

Exposição ao Risco

O cálculo da exposição ao risco é uma etapa fundamental nos processos de precificação, cálculo de reservas de prêmios, cálculo da probabilidade de ruína, etc.

O modelo de cálculo da exposição ao risco que será apresentado a seguir serve tanto para o cálculo do número de apólices expostas ao risco, importância segurada exposta ao risco ou prêmio ganho.

Cálculo da Exposição Individual

Podemos medir a exposição individual de cada risco pela relação entre o tempo em que o risco ficou exposto no período de análise e o tempo total do período de análise. Mesmo que o risco tenha iniciado antes do período de análise, ele é considerado no cálculo da exposição individual, desde que tenha alguma interseção de vigência no período de análise.

Se considerarmos 1 dia como a unidade mínima de contagem de tempo, teremos:

Exposição Individual $= \dfrac{NI}{NA}$

Sendo:

NI – Número de dias da vigência com interseção com o período de análise;

NA – Número de dias do período de análise.

Somente as apólices com pelo menos 1 dia de vigência no período de análise estão sujeitas ao cálculo da exposição individual. Com isso, a apólice precisa ter início de vigência ou término de vigência dentro do período de análise, podendo conter ambas as datas. A visão esquemática, apresentada por WESTENBERGER no gráfico 1, ajuda a ilustrar o conceito de exposição individual.

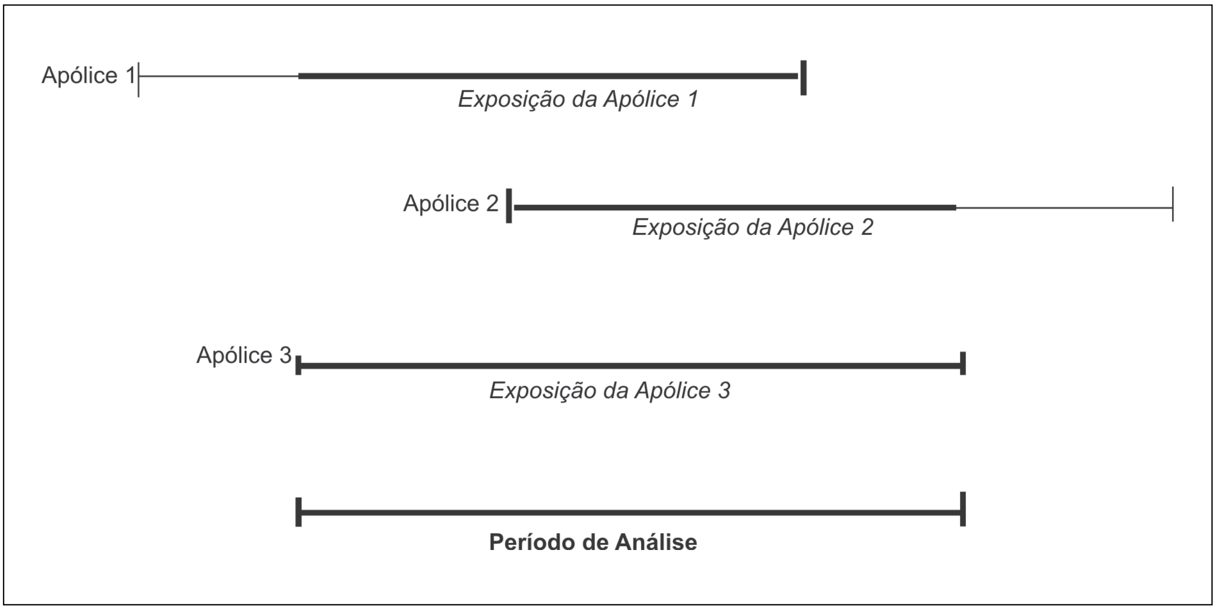

Gráfico 1

TEIXEIRA ilustra o cálculo da exposição individual em caso de endosso, onde, segundo ele, é importante tratar adequadamente o efeito de cada tipo de endosso sobre o risco em questão, conforme resumido na tabela apêndice 1:

Tabela Apêndice 1.1	
Tipo de Endosso	**Efeito**
Inclusão em apólice	Início de um novo risco
Alteração	Término do risco anterior e início de um novo risco
Cancelamento de apólice	Término do risco anterior
Cancelamento de endosso anterior ao endosso cancelado.	Término do risco anterior e reconsideração do risco
Reativação da apólice	Reinício da vigência do risco cancelado

Vejamos, a seguir, um exemplo de cálculo da exposição individual de uma apólice e seus respectivos endossos (vide a tabela apêndice 1.2) no período de análise anual do ano t.

Tabela Apêndice 1.2			
Tipo de Documento	**Risco**	**Início de Vigência**	**Término de Vigência**
Apólice	A	01/10/t-1	30/09/t
Endosso de Alteração	B	02/03/t	30/09/t
Endosso de Cancelamento da Apólice	-----	01/05/t	30/09/t
Reativação da Apólice	B	02/05/t	30/09/t

Veja que o risco A, subscrito em 1 de outubro do ano t-1, foi substituído pelo risco B, sendo esse cancelado em 1 de maio do ano t, sendo reativado em 2 de maio do ano t, permanecendo em vigor até o término de vigência da apólice em 30 de setembro do ano t.

Neste caso, a visão esquemática é apresentada no gráfico 2.

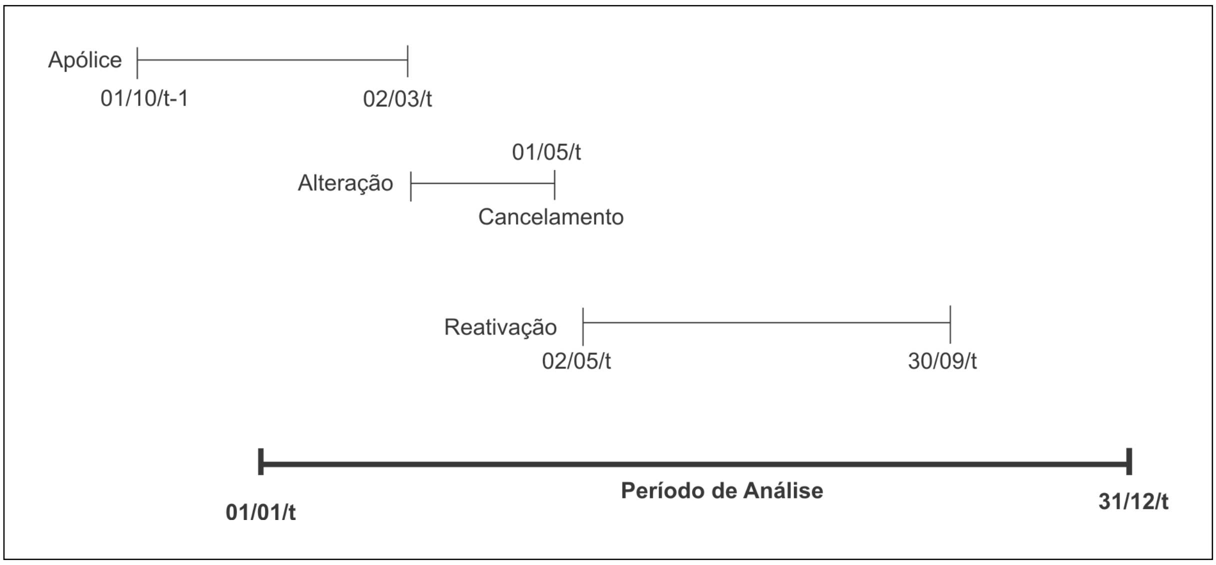

Gráfico 2

Desta forma, para os riscos A e B, temos as seguintes exposições individuais:

a) Risco A

O risco A ficou em vigor no ano t de 01/01/t até 01/03/t, ou seja, durante 60 dias (supondo fevereiro com 28 dias).

Logo;

Exposição Individual $= \dfrac{60}{365} = 0{,}1644$

b) Risco B

O risco B ficou em vigor no ano t de 02/03/t até 30/04/t, e de 02/05/t até 30/09/t, ou seja, durante 60 dias no primeiro período mais 152 dias no segundo período, totalizando 212 dias.

Logo;

Exposição Individual $= \dfrac{212}{365} = 0{,}5808$

Endosso de Cancelamento por Sinistro

Conforme já abordado neste apêndice, o endosso de cancelamento da apólice interrompe a contagem da exposição em função do risco cessar naquele momento. No caso de cancelamento por sinistro, entretanto, deve-se estender a contagem da exposição até o final de vigência original da apólice.

Este procedimento fica mais fácil de ser entendido quando se calcula a freqüência anual de sinistros, onde fica claro que a apólice sinistrada deve ter sua exposição considerada como 1, pois, caso contrário, tomaríamos somente uma proporção do risco, deturpando, assim, o conceito de freqüência de sinistros.

Cálculo Simplificado da Exposição Agregada

A exposição agregada de um risco é definida como a soma de todas as exposições individuais.

Conforme abordado neste apêndice, o cálculo da exposição individual deve ser elaborado considerando-se todas as possíveis alterações na apólice, o que requer o uso de dados individualizados para o cálculo da exposição agregada.

Uma forma mais simples de calcular a exposição agregada parte do número de apólices em vigor (R_i) para um determinado risco, para cada dia do período de análise (n), sendo , então, a exposição agregada igual a média do número de apólices em vigor no período n, ou seja,

Exposição Agregada $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} R_i}{n}$

Esta forma de cálculo vale também para o cálculo de importâncias seguradas expostas, prêmios ganhos etc.

Além de simples, esta forma de cálculo é exata, pois, todas as alterações nas apólices são automaticamente incluídas na movimentação do saldo de riscos em vigor em cada dia (R_i). Deve-se tomar cuidado, entretanto, para considerar as apólices sinistradas como se estivessem em vigor até o final de vigência originalmente contratado.

Na prática é comum se calcular a média do saldo mensal dos riscos em vigor, como conseqüência da maioria dos relatórios gerenciais das seguradoras serem emitidos mensalmente. Nesse caso, entretanto, não se tem o mesmo grau de precisão, pois, perde-se a informação das movimentações de risco ocorridas dentro de cada mês.

APÊNDICE 2

Tabela "Distribuição Normal Padronizada Acumulada"

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964

2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Principais valores:

z	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291	3,891	4,417
$P(Z \leq z)$	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995	0,99995	0,999995

RESPOSTAS DOS EXERCÍCIOS

1) $ 3.379,95

2) 0,3%

4) $0{,}8E[I_d] - 0{,}8E[I_l]$ $\quad l = d + \dfrac{m}{0{,}8}$

5) 67,9%

6) $X_d = 0$ para $x \leq \dfrac{c}{1-K}$; $X_d = (1-K)X$ para $\dfrac{c}{1-K} < x \leq \dfrac{d}{1-K}$;

$X_d = X - d$ para $x > \dfrac{d}{1-K}$;

7) 47,97%

8) $ 41,82

9) $ 8

10) $ 901

11) 0,745

12) $ 10,98

ESCOLA NACIONAL de SEGUROS

FUNENSEG

A Escola Nacional de Seguros – FUNENSEG, é uma instituição voltada para o ensino e pesquisa do seguro no Brasil. Dentro dessas frentes de atuação, oferece uma rede de produtos e serviços destinados a qualificação profissional, a evolução educacional e ao intercâmbio de experiências com as mais conceituadas instituições nacionais e internacionais da Área de Seguros. Presente em 15 unidades, localizadas estrategicamente pelo país, a FUNENSEG atua no treinamento e formação de profissionais para o Mercado de Seguros. Sua missão consiste em acompanhar as necessidades do setor, tornando-se pólo de produção e disseminação do conhecimento em todo o território nacional. Agora que você conhece um pouco mais nosso trabalho, nos procure e venha entender porque a FUNENSEG é a ESCOLA de SEGUROS do Brasil.

www.funenseg.org.br